

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСКРЫТИЯ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Юдинцев В. В.

ФГУП ГНП РКЦ «ЦСКБ-Прогресс», Самара

Рассматривается применение метода отдельных тел для моделирования многоэлементных подвижных конструкций космических аппаратов. Метод модифицирован для плоской системы твердых тел и учитывает возможное отсутствие в системе тела с заданным законом движения. На примере механической системы раскрытия створок панели солнечных батарей сформированы необходимые для применения используемого метода матрицы кинематических связей, определяющие кинематику относительного движения смежных тел системы. Шарниры, соединяющие смежные створки, моделируются с учётом их упругих свойств на этапе фиксации створок. Адекватность предлагаемого метода проиллюстрирована на примере построения модели процесса раскрытия солнечной батареи с тремя створками.

Ключевые слова: космический аппарат, солнечная батарея, система твёрдых тел, метод отдельных тел.

1. Введение

Среди задач, возникающих при проектировании космических аппаратов (КА), отметим задачи синтеза подвижных элементов конструкции. К таким системам относятся механические системы раскрытия антенн, радиаторов, створок панелей солнечных батарей (СБ). На начальном этапе проектирования КА, когда необходимо выбрать энергетические характеристики приводов раскрытия створок СБ (обычно используют пружины кручения или торсионы), часто бывает достаточно ограничиться упрощенной моделью СБ в виде системы связанных *твёрдых тел*. Приводы раскрытия створок должны обеспечить, с одной стороны, гарантированное раскрытие СБ, с другой – минимизировать нагрузки, действующие на её конструкцию. Алгоритм выбора параметров приводов предполагает многократное проведение численных экспериментов процесса раскрытия, что требует использования эффективной математической модели.

Для построения уравнений движения могут быть использованы различные методы, некоторые из которых представлены в работах [1-4]. Большая часть методов предполагает формирование матрицы масс всей системы $M(q)$ и необходимость решения системы линейных уравнений $M(q)\ddot{q} = B(q, \dot{q})$ относительно вторых производных обобщённых координат \ddot{q} на каждом шаге метода численного интегрирования, что для механических систем с большим числом степеней свободы может приводить к существенным затратам машинного времени.

Уравнения движения могут быть записаны в обобщенных шарнирных координатах, задающих относительное положение смежных тел, или в абсолютных координатах, задающие положение тел относительно некоторого базиса, принятого за начало отсчета. В последнем случае к динамическим уравнениям движения добавляются уравнения связи. В работе [4] представлен метод, не требующий формирования матрицы масс всей системы $M(q)$: все операции выполняются с векторами или матрицами размерность которых не превышает 6 для пространственной системы и 3 – для плоской. Этот метод позволяет создать эффективную процедуру численного моделирования движения широкого класса механических систем, состоящих из большого числа тел. В статье рассматривается адаптация предложенного в [4] метода для моделирования плоской многоэлементной механической системы на примере системы раскрытия створок панелей СБ КА.

2. Уравнения движения

Рассмотрим механическую систему связанных твердых тел с незамкнутой структурой. Тела системы соединены цилиндрическими шарнирами с взаимно параллельными осями. В качестве обобщенных координат выбраны углы φ_i между базисом $e^{(i-1)}$, связанным с телом $i - 1$, и базисом $e^{(i)}$, связанным с телом i (рисунок 1). Предполагаем, что тела системы пронумерованы так, чтобы номер тела увеличивался по мере удаления от корневого шарнира, соединяющего первую створку с КА. Преобразование координат $e^{(i-1)} = A^i \cdot e^{(i)}$ между базисами $e^{(i-1)}$ и $e^{(i)}$ задается

ортогональной матрицей A^i . Здесь и далее полужирным начертанием обозначаются векторы или их координатные столбцы в соответствующей системе координат, которая указывается верхним индексом в круглых скобках. Матрица преобразования координат из базиса $e^{(i)}$ в базис $e^{(0)}$, который связан с КА, есть результат последовательных преобразований

$$e^{(0)} = A^1 \cdot A^2 \cdot A^3 \dots A^i \cdot e^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

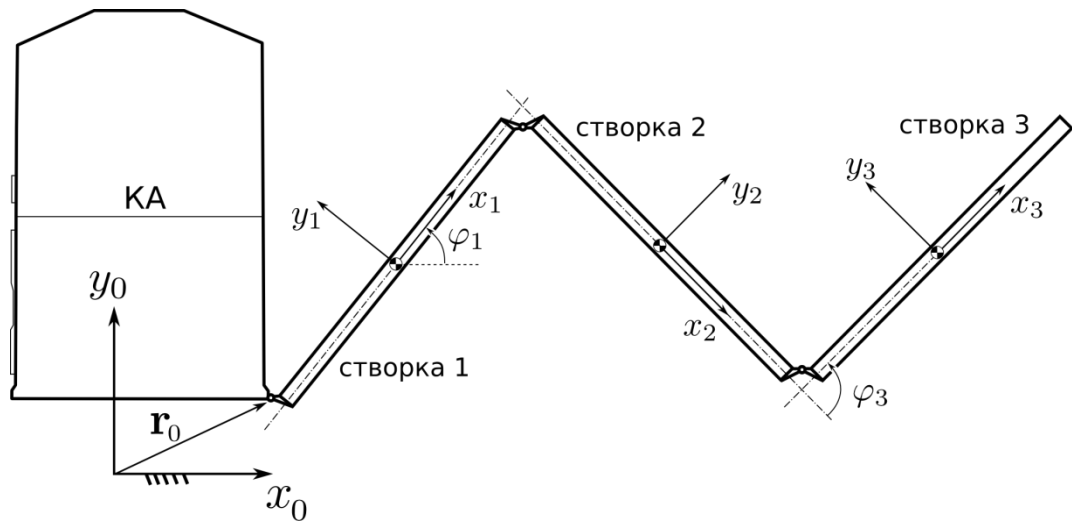


Рисунок 1 – Схема системы (показана одна панель батареи КА)

Введем координатный столбец w_i , включающий в себя векторы абсолютного линейного \ddot{r}_i и углового ускорений $\dot{\omega}_i$ i -ого тела: $w_i = \{\ddot{r}_i, \dot{\omega}_i\}^T$. Уравнение движения последнего тела – тела с максимальным индексом, имеет следующий вид [5]:

$$M_n w_n = Q_n + Y_n \quad (1)$$

где M_n – матрица инерции тела n :

$$M_n = \begin{pmatrix} m_n E_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_n \end{pmatrix},$$

$E_{3 \times 3}$ – единичная матрица размера 3×3 ; m_n – масса створки, J_n – тензор инерции створки в её центральном базисе. Столбец $Q_n = \{F_n, L_n\}^T$ включает в себя главный вектор внешних сил F_n и моментов L_n , действующих на створку n , приведённых к её центру масс; $Y_n = \{R_n, L_{Rn}\}^T$ – столбец, состоящий из главного вектора сил R_n и моментов L_{Rn} реакции, также приведенных к центру масс створки n (рисунок 2).

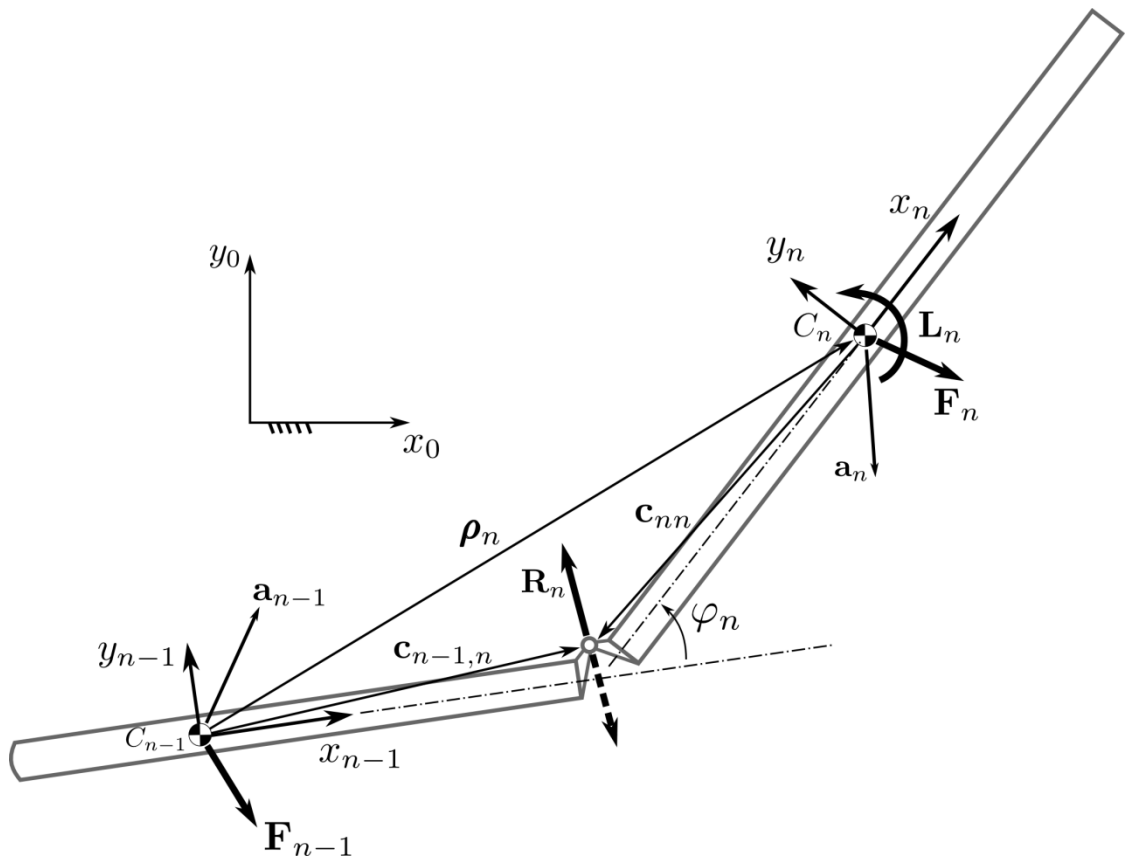


Рисунок 2 – Кинематика относительного движения створок

Координатный столбец абсолютного ускорения концевой створки \mathbf{w}_n можно выразить через абсолютное ускорение предыдущей створки и относительное ускорение створки n :

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{C}_n \cdot \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{S}_n \cdot \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{w}'_n \quad (2)$$

где

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{3 \times 3} & -\tilde{\boldsymbol{\rho}}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

\mathbf{q}_n – координатный столбец обобщенных координат, задающих положение створки n относительно створки $n - 1$. Вектор $\boldsymbol{\rho}_n$ представляет собой разность шарнирных векторов двух смежных створок: $\boldsymbol{\rho}_n = \mathbf{c}_{n-1,n} - \mathbf{c}_{n,n}$, который определяет радиус-вектор положения центра масс концевой створки n относительно центра масс предшествующей створки $n - 1$. Оператор тильда в выражении для \mathbf{C}_n позволяет записать векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ в форме произведения тензора $\tilde{\mathbf{a}}$ и вектора \mathbf{b} [1]. Для механической системы,

движущейся в плоскости xu , координатный столбец \mathbf{w}_i имеет вид: $\mathbf{w}_i = \{\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \dot{\omega}_{zi}\}^T$.

Матрица \mathbf{C}_n в этом случае запишется следующим образом:

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{2 \times 2} & -\tilde{\boldsymbol{\rho}}_n \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{2 \times 2} & -\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\rho}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

где \mathbf{e}_3 – орт оси z , \mathbf{D} – матрица, позволяющая записать векторное произведение вектора \mathbf{a} , лежащего в плоскости Oxu , и единичного вектора \mathbf{e}_3 в форме произведения матрицы и координатного столбца вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{D}\mathbf{a}$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица инерции тела в плоском случае будет иметь вид:

$$\mathbf{M}_n = \begin{pmatrix} m_n \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{nz} \end{pmatrix},$$

где J_{nz} – момент инерции створки относительно оси z , проходящей через центр масс.

Матрица \mathbf{S}_n в выражении (2) определяется кинематикой относительного движения тел. Для цилиндрического шарнира с осью вращения параллельной оси z эта матрица представляет собой следующий столбец:

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_{n,n} \cdot \mathbf{e}_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} \cdot \mathbf{c}_{n,n} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Последнее слагаемое выражения (2) – \mathbf{w}'_n представляет собой сумму составляющих ускорения центра масс тела n , не зависящих от углового ускорения предшествующей створки и второй производной столбца обобщенных координат $\ddot{\mathbf{q}}_n$. Слагаемое \mathbf{w}'_n для пространственной системы записывается следующим образом:

$$\mathbf{w}'_n = \boldsymbol{\omega}_{n-1} \times (\boldsymbol{\omega}_{n-1} \times \boldsymbol{\rho}_n) - 2 \boldsymbol{\omega}_{n-1} \times (\boldsymbol{\Omega}_n \times \mathbf{c}_{nn}) - \boldsymbol{\Omega}_n \times (\boldsymbol{\Omega}_n \times \mathbf{c}_{nn}),$$

где $\boldsymbol{\Omega}_n$ – вектор угловой скорости створки n относительно $n-1$. Для плоской системы столбец \mathbf{w}'_n имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_n &= \begin{pmatrix} -\omega_{n-1}^2 (\mathbf{c}_{n-1,n} - \mathbf{c}_{n,n}) + \dot{\varphi}_n^2 \mathbf{c}_{n,n} + 2\dot{\varphi}_n \omega_{n-1} \mathbf{c}_{n,n} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\dot{\varphi}_n + \omega_{n-1})^2 \mathbf{c}_{n,n} - \omega_{n-1}^2 \mathbf{c}_{n-1,n} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Учитывая идеальность связей между телами, справедливо соотношение $\mathbf{S}_n^T \mathbf{R}_n = 0$, что позволяет, умножив уравнение движения (1) на \mathbf{S}_n^T , с учетом (2), выразить вторую производную обобщенной координаты $\ddot{\mathbf{q}}_n$:

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{U}_n^{-1} \mathbf{S}_n^T (\mathbf{Q}_n - \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{w}'_n)), \quad (3)$$

где $\mathbf{U}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{S}_n$. В соответствии с процедурой, изложенной в [4], полученное выражение для $\ddot{\mathbf{q}}_n$ позволяет исключить \mathbf{Y}_n из уравнения движения створки $n - 1$: $\mathbf{M}_{n-1} \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1} + \mathbf{Y}_{n-1} - \mathbf{C}_n^T \mathbf{Y}_n$, используя уравнения (1) и (2), после чего уравнение $n - 1$ створки примет следующий вид:

$$\mathbf{M}_{n-1}^* \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1}^* + \mathbf{Y}_{n-1}.$$

Это уравнение справедливо для любого $n = k$, а матрицы \mathbf{M}_{k-1}^* и \mathbf{Q}_{k-1}^* вычисляются при помощи следующих рекуррентных формул [4]:

$$\mathbf{M}_{k-1}^* = \mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}_k^* \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{S}_k (\mathbf{U}_k^*)^{-1} \mathbf{S}_k^T \mathbf{M}_k^* \mathbf{C}_k, \quad (4)$$

$$\mathbf{Q}_{k-1}^* = \mathbf{Q}_{k-1} - \mathbf{C}_k^T [\mathbf{M}_k^* \{ \mathbf{S}_k (\mathbf{U}_k^*)^{-1} \mathbf{S}_k^T (\mathbf{Q}_k^* - \mathbf{M}_k^* \mathbf{w}'_k) + \mathbf{w}'_k \} - \mathbf{Q}_k^*]. \quad (5)$$

Матрица \mathbf{U}_k^* вычисляется при помощи матрицы \mathbf{M}_k^* : $\mathbf{U}_k^* = \mathbf{S}_k^T \mathbf{M}_k^* \mathbf{S}_k$.

Если масса космического аппарата существенно больше массы солнечной батареи и можно допустить, что створки в процессе движения не оказывают существенного влияния на движение известного космического аппарата: $\mathbf{w}_0 = \mathbf{f}(t)$, то можно найти координатный столбец $\ddot{\mathbf{q}}_1$ при помощи выражения (3). При этом матрицы, входящие в выражение (3), вычисляются при помощи рекуррентных соотношений (4) и (5). Подставив $\ddot{\mathbf{q}}_1$ в (2) найдем \mathbf{w}_1 . Далее процедура повторяется для $\ddot{\mathbf{q}}_2, \mathbf{w}_2, \ddot{\mathbf{q}}_3, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_n, \ddot{\mathbf{q}}_n$. Так в каждый момент времени могут быть получены значения вторых производных обобщенных координат, необходимые для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений.

Если необходимо учитывать и движение КА в процессе раскрытия створок, то в этом случае к уравнениям движения необходимо добавить уравнение движения центра масс всей системы $\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_c = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$. Между телом 1 механической системы и базисом инерциальной системы координат необходимо ввести фиктивный шарнир с тремя

степенями свободы, если рассматривается плоская задача, или с 6 степенями свободы – для пространственной системы. Матрица S_1 для фиктивного шарнира плоской системы единичная $S_1 = E_{3 \times 3}$, а столбец обобщенных координат q_1 , задающий положение первого тела, включает в себя положение его центра масс и угол поворота $q_1 = \{x_1, y_1, \varphi_1\}^T$. Ускорение первого тела, на котором расположен фиктивный шарнир, определяется из уравнения (1), учитывая, что силы и моменты реакции фиктивного шарнира равны нулю $Y_1 = 0$: $w_1 = (M_1^*)^{-1} Q_1^*$. Далее последовательно определяются $\ddot{q}_2, w_2, \ddot{q}_3, w_3, \dots, w_n, \ddot{q}_n$.

3. Модель элементов фиксации створок

По достижении створками заданного угла поворота, в шарнире на смежные створки начинает действовать момент, создаваемый элементами фиксации – защелками. Момент удерживает смежные створки в заданном относительном положении. Будем считать, что этот удерживающий момент пропорционален углу поворота створок друг относительно друга:

$$M_{si} = -k_{ij}(\varphi_i - \varphi_{ik}) - d_{ij}\dot{\varphi}_i, \quad (6)$$

где k_{ij} – угловая (крутильная) жесткость, которую обеспечивает механизм фиксации, $d_{ij} \geq 0$ – коэффициент демпфирования; φ_{ik} – конечный угол поворота i -ой створки в раскрытом положении солнечной батареи (рисунок 3).

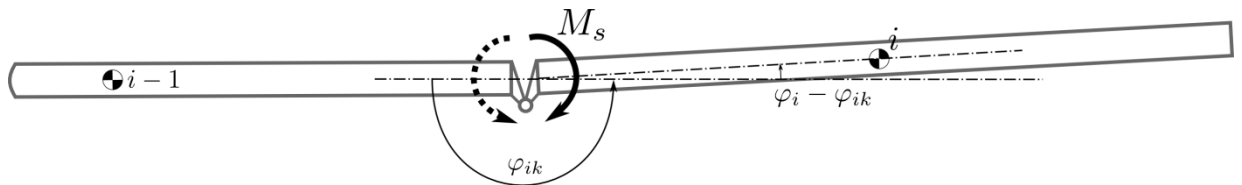


Рисунок 3 – Удерживающий момент M_s

Для «включения» удерживающего момента по достижении заданного угла можно воспользоваться непрерывной кусочно-гладкой функцией $f_{si}(\varphi_i)$, которая аппроксимирует ступенчатую функцию [5]:

$$f_{si}(\varphi_i, \varphi_{ik}) = \begin{cases} \varphi_i \leq \varphi_{ik}, & \varphi_i \leq \varphi_{ik}, \\ h_0 + \Delta h u_{\varphi_i}^2 (3 - 2 \Delta), & \varphi_{ik} < \varphi_i < \varphi_{ik}^*, \\ h_1, & \varphi_i \geq \varphi_{ik}^*, \end{cases}$$

где $\Delta h = h_1 - h_0$; $u_{\varphi_i} = (\varphi_i - \varphi_{ik}) / (\varphi_{ik}^* - \varphi_{ik})$, $\varphi_{ik}^* = \varphi_{ik} + \varepsilon$, ε – малая положительная величина. Умножив (6) на $f_{si}(\varphi_i, \varphi_{ik})$, получим выражение для момента, который начнет действовать на смежные створки только по достижении заданного угла φ_{ik} . Однако, в своем дальнейшем движении створка может достичь значений углов $\varphi_i \leq \varphi_{ik}$, при которых функция $f_{si}(\varphi_i, \varphi_{ik})$ снова станет равна нулю, что приведёт к «отключению» удерживающего момента. На рисунке 4 показан график изменения функции $f_{si}(\varphi_i, \varphi_{ik})$ от времени, который иллюстрирует такую возможность. Для того, чтобы удерживающий момент действовал всегда после достижения створкой заданного угла – угла фиксации, вместо функции $f_{si}(\varphi_i, \varphi_{ik})$ можно использовать значение интеграла:

$$S_i(\varphi_i, \varphi_{ik}) = \int_0^t f_{si}(\varphi_i, \varphi_{ik}) dt$$

и «включение» удерживающего момента осуществлять при условии $S_i(\varphi_i, \varphi_{ik}) > 0$. Для реализации этого алгоритма к дифференциальным уравнениям движения системы необходимо добавить дополнительное дифференциальное уравнение $\dot{S}_i(t) = f_{si}(\varphi_i(t), \varphi_{ik})$. Выражение для момента, действующего на створку, будет иметь вид:

$$M_i = f_{si}(S_i(t), 0)M_{si} + M_{Ti} + M_f,$$

где M_{Ti} – момент торсиона, пропорциональный углу поворота створки:

$$M_{Ti} = M_{Ti0} - \frac{M_{Tik} - M_{Ti0}}{\varphi_{ik} - \varphi_{i0}}(\varphi_i - \varphi_{i0});$$

M_{Ti0}, M_{Tik} – начальное конечное значение момента торсиона при $\varphi_i = \varphi_{i0}$ и $\varphi_i = \varphi_{ik}$ соответственно; M_f – момент от трения в шарнирах и сопротивления кабелей, зависящий от угла поворота и угловой скорости створки.

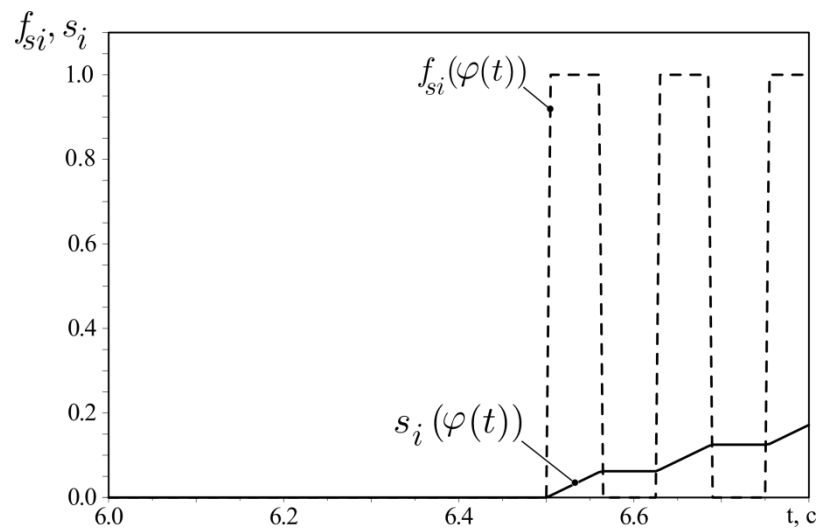


Рисунок 4 – Функция $f_{si}(\varphi), s_i(\varphi)$

4. Пример

Рассмотрим пример механической системы раскрытия СБ, состоящей из трех створок, прикрепленной к КА, который будем считать неподвижным. Схема системы приведена на рисунке 1. Параметры системы представлены в таблице 1. Интегрирование дифференциальных уравнений, построенных при помощи описанной в работе процедуры, проводилось в системе MATLAB (интегратор ode113).

Таблица 1 – Параметры системы

Параметр	Значение
Масса створки, $m_i, i = 1 \dots n$, кг	10
Момент инерции створки относительно центра масс, $J_{iz}, i = 1 \dots n$, кг·м ²	0,5
Крутильная жесткость узла вращения после фиксации, $k_{01}, k_{i,i+1} i = 1 \dots n - 1$, Н·м/рад	10 ⁴
Коэффициент демпфирования элементов фиксации, d_{ij} , Н·м·с/рад	100

Параметр	Значение
Шарнирные векторы, м	
c_{11}, c_{33}	$\{-0,505; +0,02\}^T$
c_{22}	$\{-0,505; -0,02\}^T$
c_{23}	$\{+0,505; +0,02\}^T$
Параметры торсионов	
$M_{T10}, M_{T1k}, \text{ Н}\cdot\text{м}$	2; 1,4
$M_{T20}, M_{T2k}, \text{ Н}\cdot\text{м}$	1,5; 0,5
$M_{T30}, M_{T3k}, \text{ Н}\cdot\text{м}$	0,75; 0,1

Результаты моделирования приведены на рисунках 5-7: на рисунке 5 показаны графики изменения углов поворота створок φ_1, φ_2 и φ_3 ; на рисунке 6 приведены графики изменения относительных угловых скоростей створок $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$.

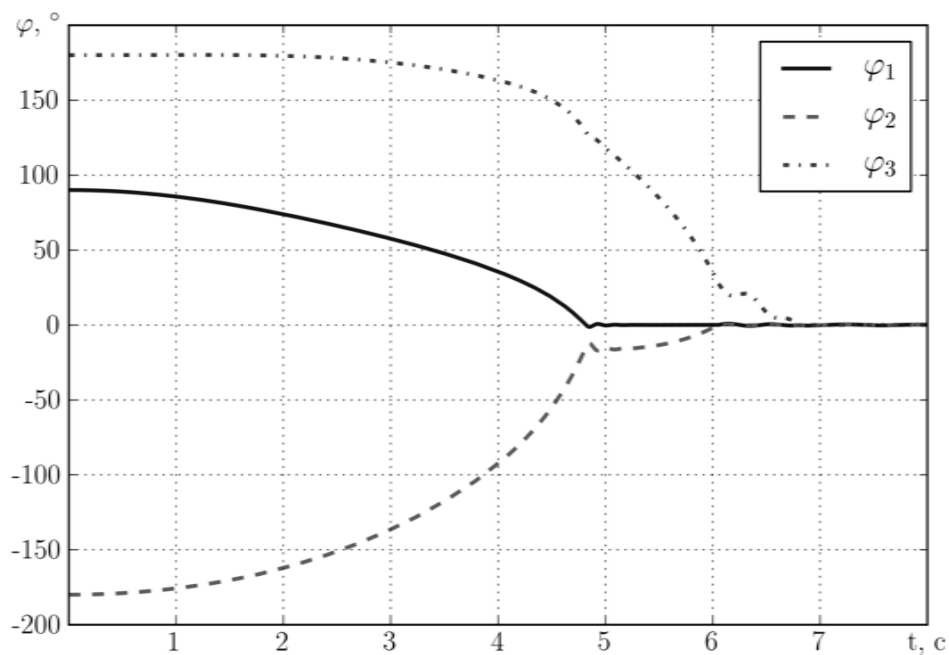


Рисунок 5 – Изменения углов поворота створок в процессе раскрытия панели солнечной батареи

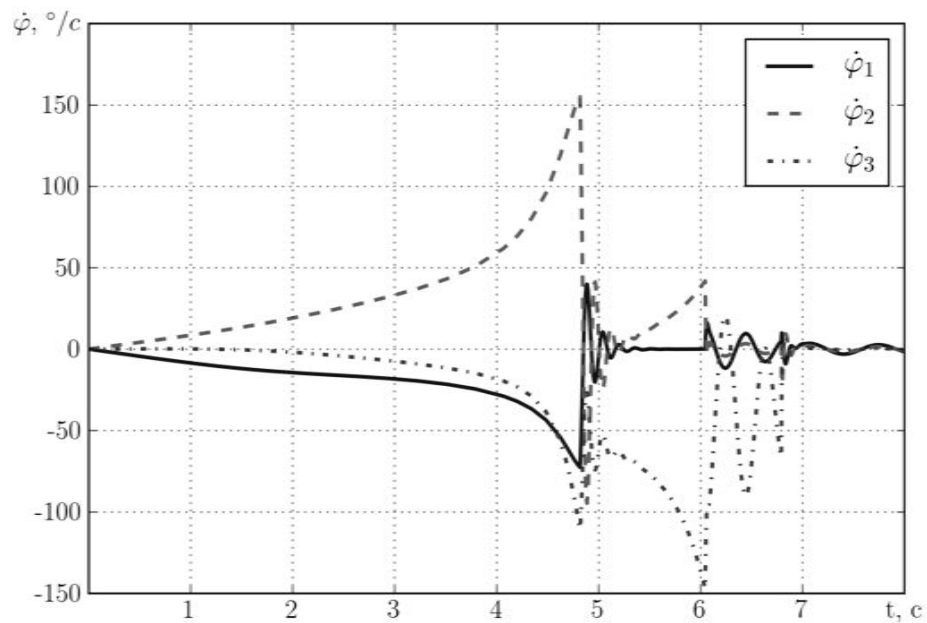


Рисунок 6 – Изменения относительных угловых скоростей створок в процессе раскрытия панели солнечной батареи

На рисунке 7 показаны графики изменения кинетической, потенциальной и полной механической энергии системы. При отсутствии моментов сопротивления, до момента срабатывания элементов фиксации створок $t = t_{\phi 1} \approx 4,7 \text{ с}$, механическая система является консервативной, что подтверждается в расчёте неизменностью полной энергии системы $T + P = \text{const}$ ($t < t_{\phi 1}$). В дальнейшем полная энергия системы убывает вследствие демпфирования колебаний в элементах фиксации.

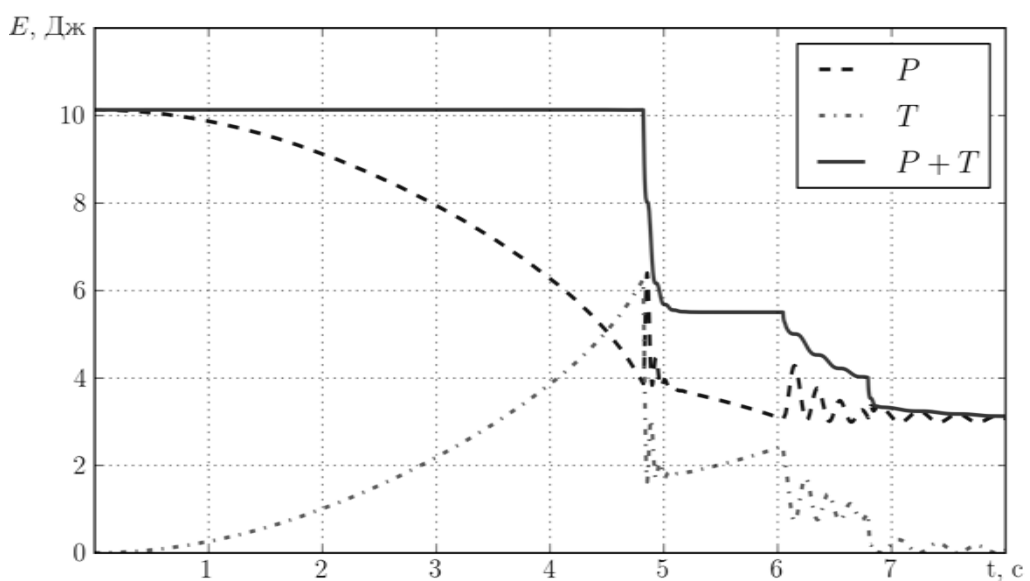


Рисунок 7 – Изменение кинетической – T , потенциальной – P и полной механической энергии системы – $T + P$

5. Заключение

Кинематические параметры створок на момент фиксации определяются большим количеством параметров: инерционно-массовыми и центровочными характеристиками створок, параметрами торсионов, моментами сопротивления кабелей, трения, защелок. Эти параметры, учитывая их возможные отклонения от средних значений, могут рассматриваться как случайные числа с известными законами и параметрами распределения. Для оценки величин кинематических параметров створок целесообразно использовать метод статистических испытаний при котором проводится серия численных экспериментов с различными наборами исходных данных, определяемых при помощи генератора псевдослучайных чисел в соответствии с заданными параметрами распределения. После статистической обработки результатов серии получают характер и параметры распределения кинематических параметров створок. Вычислительная эффективность представленного в работе метода формирования уравнений движения позволяет использовать его для построения уравнений движения механических систем при их исследовании методом статистических испытаний.

Библиографический список

1. *Й. Виттенбург* Динамика систем тел [Текст] М: Мир, 1980.
2. *Roy Featherstone* Rigid Body Dynamics Algorithms. Springer Science+Business Media, LLC, 2008.
3. *V. Aslanov, G. Kruglov, V. Yudintsev* Newton–Euler equations of multibody systems with changing structures for space applications. *Acta Astronautica* (2011), doi:10.1016/j.actaastro.2010.11.013.
4. *Верещагин А. Ф.* Компьютерное моделирование динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов *Инженерная кибернетика*, вып. 6, 1974, с. 65-70.

5. *Дмитrochenко О. Н.* Эффективные методы численного моделирования динамики нелинейных систем абсолютно твердых и деформируемых тел. Дис... канд. физ. мат. наук: 01.02.01 М. 2003.

6. *Юдинцев В. В.* Использование пакета MSC/ADAMS для моделирования механических систем ракетно-космической техники, Сборник трудов IX международной научно-технической конференции «Компьютерное моделирование 2008», г. Санкт-Петербург.